

Nombres complexes

1 DEFINITION, CALCUL

1.1 Définition

Def : Il existe un ensemble de nombres, appelé ensemble des nombres complexes et noté \mathbb{C} , vérifiant les propriétés suivantes :

1. \mathbb{C} contient \mathbb{R} .
2. \mathbb{C} contient un nombre noté i vérifiant $i^2 = -1$
3. L'addition et la multiplication ont les mêmes propriétés de calcul dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R} .

Prop : Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, a et b étant deux réels.

a est la partie réelle de z : $a = \operatorname{Re}(z)$

b est la partie imaginaire de z : $b = \operatorname{Im}(z)$

1.2 Additions et multiplication

$$z = a + i.b \quad z' = a' + i.b' \quad \begin{aligned} z + z' &= (a+a') + i.(b+b') \\ z.z' &= (aa' - bb') + i.(ab' + ba') \end{aligned}$$

Exercices 1 et 2 feuille annexe.

1.3 conjugué et quotient

Conjugué : On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté \bar{z} , défini par $\bar{z} = a - ib$

Quotient : On utilise le produit du numérateur et du dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur :
$$\frac{1}{a + i.b} = \frac{a - i.b}{(a + i.b)(a - i.b)} = \frac{a - i.b}{a^2 + b^2}$$

Exercice 3 feuille annexe

Prop :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

2 REPRESENTATION GEOMETRIQUE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})

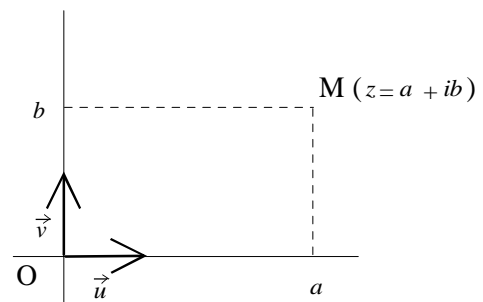
2.1 Représentation géométrique des nombres complexes

A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé l'unique point M du plan de coordonnées $(a; b)$.

On dit alors que z est l'affixe de M .

A tout vecteur du plan est associé un unique nombre complexe.

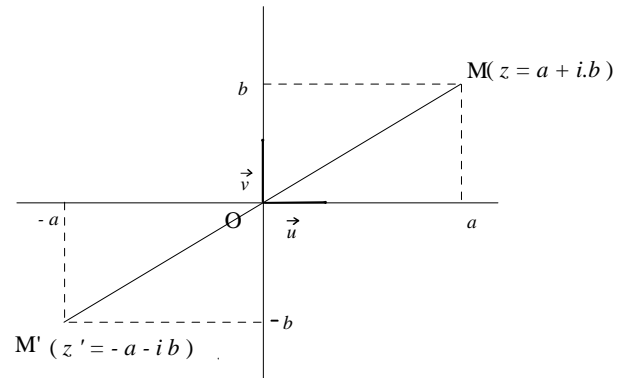
Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.



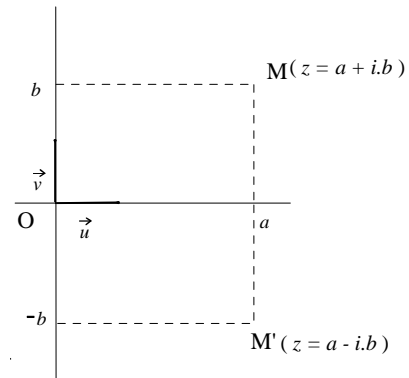
2.2 Propriétés

z est réel $\Leftrightarrow M(z)$ est sur l'axe des abscisses.
 z est imaginaire $\Leftrightarrow M(z)$ est sur l'axe des ordonnées.

Nombres complexes opposés :



Nombres complexes conjugués :



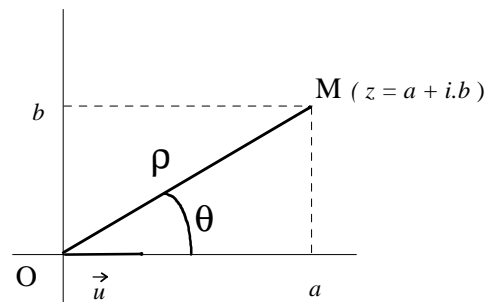
2.3 Module et argument

M est le point du plan dont l'affixe est le nombre complexe $z = a + ib$.

Module : On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$, la quantité $\rho = |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Prop : Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $MM' = |z' - z|$

Argument : On appelle argument du nombre complexe z une mesure θ de l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) . Notation $\theta = \arg(z)$



Prop : $\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2; \quad a = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad b = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

exercice 4 feuille annexe

2.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Rappel : si $z = a + ib$ alors $a = \rho \cdot \cos \theta$ et $b = \rho \cdot \sin \theta$.

Prop : tout nombre complexe z peut se mettre sous la forme $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Prop : En utilisant les formes trigonométriques des complexes z et z' et en calculant on prouve que :

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|; \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

2.5 Application à la géométrie

Prop : Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors $\vec{MM'}$ a pour affixe $z - z'$.

Prop : Si \vec{u} a pour affixe z et si \vec{v} a pour affixe z' alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.

Prop : a est un nombre complexe donné. L'application qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + a$ est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe a .

Prop : Si \vec{u} a pour affixe z et si \vec{v} a pour affixe z' alors $\left(\frac{\vec{u}}{\vec{v}} \right) = \frac{\arg(z')}{\arg(z)} = \arg(z') - \arg(z)$.

Complément : Si A, B, C et D sont les points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d

$$\text{alors } \text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right).$$

3. EQUATION DU SECOND DEGRE $az^2 + bz + c = 0$ (OU A, B ET C SONT DES REELS)

3.1 Cas particulier : $z^2 = m$ avec $m \in \mathbb{R}$

Si $m \in \mathbb{R}_+$, l'équation admet deux solutions $S = \{ -\sqrt{m}; \sqrt{m} \}$

Si $m \in \mathbb{R}_-$, l'équation admet deux solutions $S = \{ -i\sqrt{-m}; i\sqrt{-m} \}$

3.2 Cas général : $az^2 + bz + c = 0$ (où a, b et c sont des réels) (TS : TP1 p 250)

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions δ_1 et δ_2 opposées.

Prop : L'équation $ax^2 + bx + c$ admet toujours pour solutions $z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$

4 NOMBRE COMPLEXE ET EXPONENTIELLE

4.1 Forme exponentielle des nombres complexes

Prop : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Prop : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme exponentielle
 $z = r.e^{i\theta}$

4.2 Formule de Moivre

Formule de Moivre : $(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$

Formules d'addition, applications

4.3 Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

4.4 Linéarisation

Les formules d'Euler permettent de transformer toute puissance du cosinus ou du sinus ou tout produit de sinus et cosinus en somme d'éléments de la forme $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$.

Méthode : On écrit $(\cos x)^n = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n}$ ou $(\sin x)^n = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^n}{(2i)^n}$

Il ne reste plus qu'à développer le numérateur en utilisant la formule du binôme de Newton.

4.5 Interprétation géométrique de : $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z$

Prop : θ est un nombre réel donné. L'application qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\theta} \cdot z$ est la rotation de centre O et d'angle θ .

Annexes : calculs de base

Ex 1 : On donne les nombres complexes z et z' . Calculer $z + z'$; $z - z'$; $z.z'$

$z = 2 - 3i$	$z' = 5 - 4i$	<i>rép.</i>	$z + z'$	$z - z'$	$z.z'$
			$7 - 7i$	$-3 + i$	$-2 - 23i$
$z = -1 + i$	$z' = 7 - 4i$		$6 - 3i$	$-8 + 5i$	$-3 + 11i$
$z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$	$z' = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$		$2\sqrt{6}i$	$2\sqrt{2}$	-8
$z = 3(1 - i)$	$z' = -2(5 + 6i)$		$-7 - 15i$	$13 + 9i$	$-66 - 6i$

Ex 2 : Calculer les nombres complexes suivants

$$z_1 = (1 - i)(3 - i); \quad z_2 = (3 + i)(2 - i)(1 - i); \quad z_3 = (6 - 3i)(-4 + i); \quad z_4 = (-2 + 8i)(-2 - 8i)$$

$$z_5 = (1 + 2i)(-3 + i)(-7 + 3i); \quad z_6 = (1 - i)^4; \quad z_7 = (1 + 2i)^4; \quad z_8 = i(i + 2)(2i + 1)$$

Réponses :	$z_1 = 2 - 4i$	$z_2 = 6 - 8i$	$z_3 = -21 + 18i$	$z_4 = 68$
	$z_5 = 50 + 20i$	$z_6 = -4$	$z_7 = -7 - 24i$	$z_8 = -5 - 10i$

Ex 3 : On donne les nombres complexes z et z' . Calculer $\frac{z}{z'}$, en le mettant sous la forme $a + ib$.

$z = 2 + 3i$	$z' = -5 + 6i$	<i>Réponses</i>	$\frac{8 - 27i}{61}$
$z = 1 + i$	$z' = 2 - i$		$\frac{1 + 3i}{5}$
$z = 1 + 2i$	$z' = 3 + i$		$\frac{1 + i}{2}$
$z = 1 + i$	$z' = 11 + 2i$		$\frac{13 + 9i}{125}$
$z = 1$	$z' = 1 + i$		$\frac{1 - i}{2}$

Ex 4 : 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 + 4i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad z_3 = 1 - i\sqrt{2}; \quad z_4 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_5 = i - 1;$$

$$z_6 = -4; \quad z_7 = \sqrt{3} - i; \quad z_8 = \sqrt{2}(i - 1); \quad z_9 = i\sqrt{3} - 1; \quad z_{10} = -4 + 4i.$$

2. A chaque nombre complexe z_k de la question 1. on associe son image M_k dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 2 cm.

Dessiner, avec précision, les points M_k . (on n'utilise que la règle et le compas)

$z_1 = 4 + 4i$	$ z_1 = 4\sqrt{2}$	$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$	facile, en plaçant le point
$z_2 = \sqrt{3} + i$	$ z_2 = \sqrt{3 + 1} = 2$	$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \arg(z_2) = \frac{\pi}{6}$
$z_3 = 1 - i\sqrt{2}$	$ z_3 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\theta = \arg(z_3) = ?$ $\approx 0,95 \text{ rd}$
$z_4 = 1 + i\sqrt{3}$	$ z_4 = \sqrt{1 + 3} = 2$	$\cos \theta = \frac{1}{2}$	$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \arg(z_4) = \frac{\pi}{3}$
$z_5 = i - 1$	$ z_5 = \sqrt{2}$	$\arg(z_5) = 3\frac{\pi}{4}$	facile, en plaçant le point
$z_6 = -4$	$ z_6 = 4$	$\arg(z_6) = \pi$	facile, en plaçant le point
$z_7 = \sqrt{3} - i$	$z_7 = \overline{z_2}$	$\arg(z_7) = -\frac{\pi}{6}$	songer aux propriétés des conjugués
$z_8 = \sqrt{2}(i - 1)$	$z_8 = \sqrt{2} z_5$	$\arg(z_8) = 3\frac{\pi}{4}$	facile, en plaçant le point
$z_9 = i\sqrt{3} - 1$	$ z_9 = \sqrt{3 + 1} = 2$	$\cos \theta = -\frac{1}{2}$	$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \arg(z_9) = 2\frac{\pi}{3}$
$z_{10} = -4 + 4i$	$ z_{10} = 4\sqrt{2}$	$\arg(z_{10}) = 3\frac{\pi}{4}$	

Voir la figure sur la feuille suivante :

M_1 est placé sans difficulté.

M_2 est placé en utilisant le module de z_2 et la partie imaginaire (ordonnée du point égale à 1).

M_3 est placé en utilisant le module de z_3 , qui est égal à l'abscisse de M_2 , et l'ordonnée égale à -1 .

M_4 est placé en utilisant l'abscisse de 1 et le module de z_4 qui est égal à 2.

M_5 est placé sans difficulté.

M_6 est placé sans difficulté.

M_7 est le symétrique de M_2 par rapport à l'axe des abscisses (z_7 est le conjugué de z_2).

M_8 est placé en utilisant le module égal à 2 et l'alignement des points O, M_5 , M_8 .

M_9 est placé en utilisant le module et l'abscisse égale à -1 .

M_{10} est placé sans difficulté.

