

# Autres fonctions logarithmes et exponentielles

## 1 RAPPEL

La fonction logarithme népérien ( $\ln$ ) à été « fabriquée » pour simplifier les calculs.

Elle vérifie la propriété fondamentale :  $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$ .

Cette fonction est la primitive, définie sur  $\mathbb{R}^{\times+}$ , de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule pour la valeur 1.

Sa fonction réciproque, l'exponentielle, se note  $\exp(x) = e^x$ .

$e$  étant le nombre réel (unique) tel que  $\ln e = 1$ .  $e$  est la base de la fonction logarithme népérien.

L'inconvénient est que ce nombre  $e$  n'a pas une valeur simple,  $e \approx 2,71828 \dots$

**Question** : ne serait-il pas possible de trouver une autre fonction logarithme avec une base plus simple ? par exemple 10 (c'est la base de notre système de numération).

La réponse nous est donnée en cherchant une fonction  $f$  de la forme  $f(x) = k.\ln x$  car :

$$f(a.b) = k.\ln(a.b) = k.(\ln a + \ln b) = k.\ln a + k.\ln b = f(a) + f(b).$$

Donc toute fonction  $x \mapsto k.\ln x$  vérifie la propriété fondamentale.

Il ne reste plus qu'à choisir la valeur de  $k$  pour avoir la base 10, en faisant de telle sorte que  $f(10) = 1$ .

Or  $k.\ln(10) = 1$  donne  $k = \frac{1}{\ln(10)}$ .

## 2 FONCTION LOGARITHME DECIMAL

**2.1 Définition**  $\log : \mathbb{R}^{\times+} \longrightarrow \mathbb{R}$  fonction logarithme décimal

$$x \longrightarrow \frac{\ln x}{\ln 10}$$

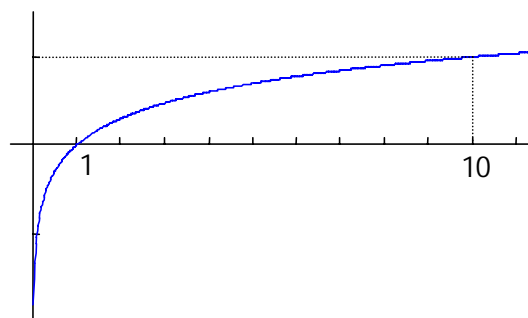
**2.2 dérivée**  $(\log x)' = \frac{1}{x.\ln 10}$  comme  $10 > 1$ , on a  $\ln 10 > 0$  donc cette dérivée est positive.

**2.3 limites** On trouve les mêmes que pour  $\ln$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$

Le tableau de variation et la courbe sont semblable.

	0	$+\infty$
	+	
		$+\infty$
	$-\infty$	

↗



conséquences :  $\log 10 = 1$  ;  $\log 100 = 2$  ; ... ;  $\log(10^n) = n$ .

A la différence de la fonction  $\ln$ , avec la fonction  $\log$ , on connaît facilement un ordre de grandeur de la solution de l'équation  $\log x = k$ .

Ex : Si  $\log x = 3,72$  alors  $10^3 < x < 10^4$ .  
 Si  $\log x = -5,18$  alors  $10^{-6} < x < 10^{-5}$ .

### 2.4 Fonction réciproque

La fonction réciproque de cette fonction sera la fonction  $x \mapsto y = 10^x$  mais que signifie  $10^x$  ?

Il suffit d'écrire :  $y = 10^x \Leftrightarrow \log y = x \Leftrightarrow \frac{\ln y}{\ln 10} = x \Leftrightarrow \ln y = x \cdot \ln 10 \Leftrightarrow y = e^{x \cdot \ln 10}$

Conclusion :  $10^x = e^{x \cdot \ln 10}$ .

## 3 AUTRES FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Ce que l'on vient de faire pour le nombre 10 rien n'empêche, à priori, de le faire pour un autre nombre réel  $a$ . Sachant que toute fonction  $x \mapsto k \cdot \ln x$  vérifie la propriété fondamentale.

Il ne reste plus qu'à choisir la valeur de  $k$  pour avoir la base  $a$ .

**3.1 Définition**  $\log_a : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$  fonction logarithme de base  $a$   
 $x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$  ATTENTION :  $a \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\}$

**3.2 Dérivée**  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

**3.3 Variation** comme  $x > 0$ , la dérivée et du signe de  $\ln a$ . Il y a donc deux situations à étudier.

Si  $a < 1$  alors  $\ln a < 0$

**Limites**

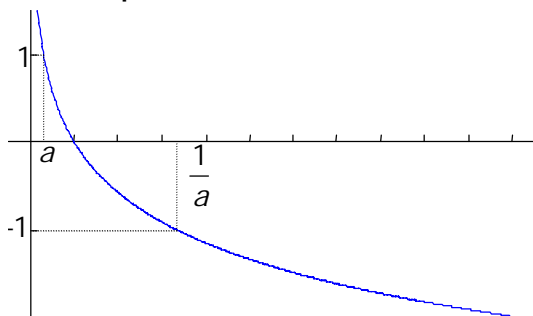
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$

**Variations**

	0	$+\infty$
$(\log_a x)'$	-	
$\log_a x$	$+\infty$	$-\infty$

**Courbe représentative**



Si  $a > 1$  alors  $\ln a > 0$

**Limites :**

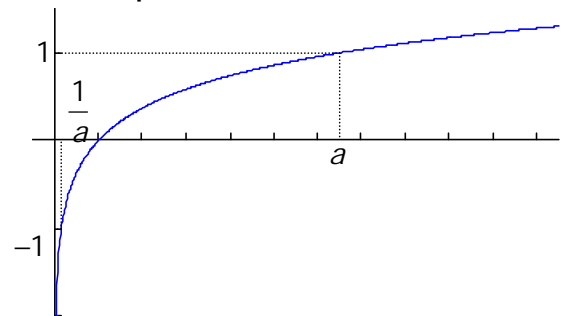
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$

**Variations**

	0	$+\infty$
$(\log_a x)'$	+	
$\log_a x$	$-\infty$	$+\infty$

**Courbe représentative**



### 3.4 fonction réciproque

Dans tous les cas la fonction  $\log_a$  réalise une bijection donc elle admet une fonction réciproque  $\exp_a$  définie par  $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

**Définition :**  $\exp_a : \mathbb{R}^{x^+} \longrightarrow \mathbb{R}$  fonction exponentielle de base  $a$   
 $x \longrightarrow \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$  ATTENTION :  $a \in \mathbb{R}^{x^+} \setminus \{1\}$

**Dérivée :** ( On dérive une fonction composée )  $(e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a}$  donc  $(a^x)' = \ln a \cdot (a^x)$

**Variation :** comme  $x > 0$ , la dérivée et du signe de  $\ln a$ . Il y a donc deux situations à étudier.

Si  $a < 1$  alors  $\ln a < 0$

**limites :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

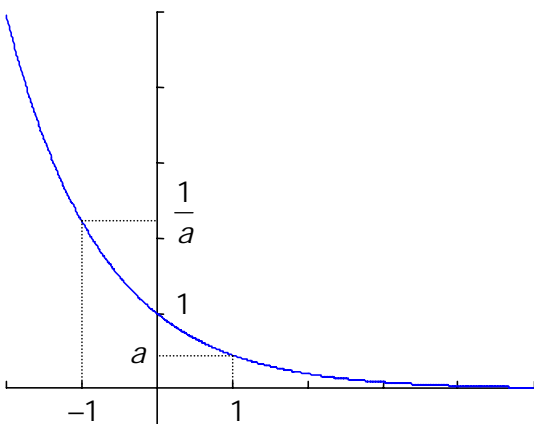
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

**Variations**

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	-	
$(a^x)$	$+\infty$	$0$

**Courbe représentative**



Si  $a > 1$  alors  $\ln a > 0$

**limites :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

**Variations**

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	+	
$(a^x)$	$0$	$+\infty$

**Courbe représentative**

