

Produit vectoriel

1. ORIENTATION

1.1 Sur la droite

On prend un vecteur $\vec{A}$, directeur de la droite (donc $\vec{A} \wedge \vec{B}$).
Tous les vecteurs de même sens que $\vec{A}$ constituent le premier groupe de vecteur.
Tous les vecteurs de sens opposé à $\vec{A}$ constituent le deuxième groupe de vecteurs.

caractérisation par le calcul

Si $\vec{A} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B})$ est un autre vecteur directeur de la droite alors $\vec{A} = k.\vec{A}$.

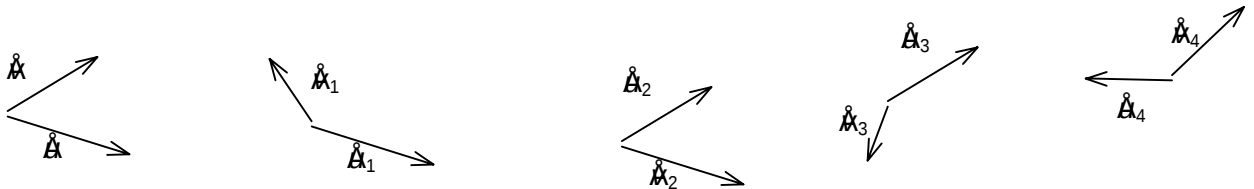
Prop 1 : $\vec{A}$ et $\vec{A}$ sont de même sens si et seulement si $k \geq 0$.

1.2 Dans le plan

L'orientation a d'abord été définie sur le cercle trigonométrique.
Sens positif : sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre.

On prend un couple de vecteurs $(\vec{A}, \vec{A})$ avec $\vec{A} \wedge \vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{B}$.
Comment définir s'il est orienté positivement au sens donné plus haut?

Exemple : Parmi tous les couples suivants lesquels sont orientés positivement?



Quelle règle géométrique simple utiliser pour trouver à coups sûr la réponse?

Prop : Je place un point quelconque A, puis les points B et C tels que $\vec{AB} = \vec{A}$ et $\vec{AC} = \vec{A}$.
Je me place en A et je regarde dans la direction de $\vec{A}$, le repère est direct si et seulement si le vecteur $\vec{A}$ est placé à ma gauche.

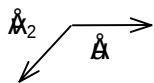
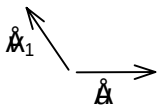
caractérisation par le calcul

Le plan est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{A}, \vec{A})$.

Les vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_1$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base $(\vec{A}, \vec{A})$: $\vec{A}_1(a; b)$ et $\vec{A}_1(a'; b')$

A quelle condition sur a, b, a', b' la base $(\vec{A}_1; \vec{A}_1)$ est-elle directe ?

cas particulier : la base $(\vec{A}; \vec{A}_1)$

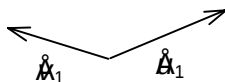


C'est l'ordonnée de $\vec{A}_1$ qui donne l'orientation :

Si $a' \geq 0$ alors $(\vec{A}; \vec{A}_1)$ est directe.

Si $a' \leq 0$ alors $(\vec{A}; \vec{A}_1)$ est indirecte.

cas général :



On se ramène au cas précédent en définissant une base orthonormée directe $(\vec{A}'; \vec{A}')$ avec $\vec{A}'$ colinéaire à $\vec{A}$ et de même sens.

La base $(\vec{A}_1; \vec{A}_1)$ sera directe si et seulement si l'ordonnée de $\vec{A}_1$ dans la base $(\vec{A}'; \vec{A}')$ est positive.

Il reste donc à déterminer les coordonnées de $\vec{A}_1$ dans la base $(\vec{A}'; \vec{A}')$.

réponse : Dans la base $(\vec{A}' ; \vec{B}')$ le vecteur $\vec{A}_1$ a pour coordonnées $\left(\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

Prop 2 : Dans la base orthonormée directe $(\vec{A}, \vec{B})$ on a $\vec{A}_1(a; b)$ et $\vec{B}_1(a'; b')$.
La base $(\vec{A}_1, \vec{B}_1)$ est directe si et seulement si $ab' - a'b > 0$.

1.3 Dans l'espace

On prend un triplet de vecteurs $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ avec $\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \wedge \vec{C} \neq \vec{0}$ et $\vec{C} \wedge \vec{A} \neq \vec{0}$.
Comment définir s'il est orienté positivement ?

Regardons l'orientation du plan :

On dessine le sens positif sur une feuille transparente et l'on retourne la feuille.
D'où la nécessité de dire de quel côté du plan on se place pour observer.

Prop 3 : Les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ constituant une base de l'espace.
Soit A un point quelconque de l'espace. On considère le plan de repère $(A; \vec{A}; \vec{B})$.
Si lorsque que l'on observe ce plan " du coté du vecteur $\vec{C}$ ", la base $(\vec{A}; \vec{B})$ est directe
alors la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est directe.

règle des trois doigts de la main droite : Si les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ correspondent respectivement au pouce, à l'index et au majeur de la main droite alors la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est directe.

rem : S'ils correspondent au pouce, à l'index et au majeur de la main gauche alors la base est indirecte.

Règle du tire bouchon de Maxwell : Si en tournant de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$, on se déplace dans le sens du vecteur $\vec{C}$ alors la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est directe

rem : Dans l'espace on n'énoncera pas de caractérisation par le calcul.

2. PRODUIT VECTORIEL

2.1 Définition

Def : Etant donné trois points distincts A, B et C et non alignés, on appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ le vecteur $\vec{AD}$ noté $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ défini par :

Sa direction : $\vec{AD}$ est un vecteur normal au plan ABC.

Son sens : $(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})$ est une base directe.

Sa norme : égale à l'aire du parallélogramme ABEC

Rem : $AD = AB * AC * \sin(\vec{AB}; \vec{AC})$.

cas particuliers : Si l'un des vecteurs $\vec{AB}$ ou $\vec{AC}$ est le vecteur nul ou si les vecteurs sont colinéaires alors le produit vectoriel est le vecteur nul.

Cas de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de l'espace : il suffit de poser $\vec{A} = \vec{AB}$ et $\vec{B} = \vec{AC}$.

Exemple : $(\vec{A}; \vec{B}; \vec{C})$ étant une base orthonormée directe de l'espace, calculer les produits vectoriels

suivants : $\vec{A} \wedge \vec{A}$; $\vec{A} \wedge \vec{B}$; $\vec{B} \wedge \vec{A}$; $\vec{B} \wedge \vec{B}$; $\vec{A} \wedge \vec{C}$; $\vec{C} \wedge \vec{A}$.

2.2 propriétés

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$(a.\vec{A}) \wedge (b.\vec{B}) = (ab).(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

2.3 Expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe ($\vec{A}; \vec{B}; \vec{C}$)

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ont respectivement pour coordonnées $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans la base $(\vec{A}; \vec{B}; \vec{C})$ alors en appliquant les propriétés précédentes à $\vec{A} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ et $\vec{B} = x'\vec{A} + y'\vec{B} + z'\vec{C}$, on trouve $\vec{A} \wedge \vec{B} = (yz' - zy')\vec{A} + (zx' - xz')\vec{B} + (xy' - yx')\vec{C}$

Méthode :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \vec{y} & \vec{y}' \\
 \swarrow & \searrow \\
 \vec{z} & \vec{z}' \\
 \swarrow & \searrow \\
 \vec{x} & \vec{x}' \\
 \swarrow & \searrow \\
 \vec{y} & \vec{y}'
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{l}
 yz' - zy' \\
 zx' - xz' \\
 xy' - yx'
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

2.4 Applications

Equation d'un plan

Calculs de distances et d'aires

1. Distance d'un point à un plan.
2. Calcul d'aire; Distance d'un point à une droite.

Calculs de volumes

1. Volume d'un parallélépipède.
2. Volume d'un tétraèdre.