Barycentre dans le plan

1 Barycentre de deux points

def : A et B sont deux points du plan; a et b sont deux réels tels que $a + b \neq 0$
Il existe un unique point G du plan tel que $a\,\vec{GA} + b\,\vec{GB} = \vec{0}$.
G s'appelle le barycentre du système {(A; a); (B;b)}.

Prop : G est aussi le barycentre du système {(A; $k.a$); (B; $k.b$)}. *($k \neq 0$)*
Pour tout réel $k \neq 0$, le point G ne change pas si on multiplie ou si l'on divise tous les coefficients par k.

Propriété caractéristique : Pour tout point M du plan, $a\vec{MA} + b\,\vec{MB} = (a+b)\vec{MG}$.

Conséquence : Si M = A alors $\vec{AG} = \dfrac{b}{a+b}\vec{AB}$.

coordonnées : Si les coordonnées des points A et B sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées de G sont : $x_G = \dfrac{a.x_A + b.x_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{a.y_A + b.y_B}{a+b}$

2 Barycentre de 3 points

def : A, B et C sont trois points du plan; a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c \neq 0$
Il existe un unique point G du plan tel que $a\,\vec{GA} + b\,\vec{GB} + c\,\vec{GC} = \vec{0}$.
G s'appelle le barycentre du système {(A; a); (B;b); (C; c)}.

Prop : G est aussi le barycentre du système {(A; $k.a$); (B;$k.b$); (C; c)}. *($k \neq 0$)*
Pour tout réel $k \neq 0$, le point G ne change pas si on multiplie ou si l'on divise tous les coefficients par k.

Propriété caractéristique : Pour tout point M du plan, $a\vec{MA} + b\,\vec{MB} + c\,\vec{MC} = (a+b+c)\vec{MG}$.

coordonnées : Si les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $(x_C; y_C)$ alors les coordonnées de G sont : $x_G = \dfrac{a.x_A + b.x_B + c.x_C}{a+b+c}$ et $y_G = \dfrac{a.y_A + b.y_B + c.y_C}{a+b+c}$.

Propriété d'associativité :

Si $a+b \neq 0$ alors on peut remplacer le système {(A; a); (B;b)} par son barycentre G_1 affecté du coefficient $a+b$ est dire que G est le barycentre du système {(G_1; $a+b$); (C; c)}.

Cette propriété est fondamentale pour construire le barycentre de trois points à partir de barycentres successifs de deux points.

3 Barycentre de 4 points et plus

Def : G est le barycentre du système {$(A_1; a_1)$; $(A_2; a_2)$; . . .$(A_n; a_n)$} avec $a_1 + . . . + a_n \neq 0$ ($\Sigma a_i \neq 0$)
si et seulement si $a_1\,\vec{GA}_1 + a_2\,\vec{GA}_2 + \ldots + a_n\,\vec{GA}_n = \vec{0}$ ($\Sigma a_i\,\vec{GA}_i = \vec{0}$)

Propriété caractéristique : Pour tout point M
$a_1\,\vec{MA}_1 + a_2\,\vec{MA}_2 + \ldots + a_n\,\vec{MA}_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,\vec{MG}$ $\qquad \Sigma a_i\,\vec{MA}_i = (\Sigma a_i)\,\vec{MG}$

La propriété d'associativité s'applique encore mais on peut remplacer plus de 2 points par leur barycentre auquel on affecte la somme des coefficients.

La formule des coordonnées s'applique aussi.