Limites continuité

1 LES RESULTATS CONNUS

1.1 limites en $a \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$ $\quad \lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ $a > 0$ $\quad \lim_{x \to a} \ln x = \ln a$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to a} x^n = a^n$ $\quad \lim_{x \to a} e^x = e^a$ $\quad \lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ $\quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

rem : Toutes les fonctions citées vérifient $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Def : La fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Graphiquement, la courbe est une " ligne continue " en a . Ce n'est pas toujours le cas (Voir les fonctions de répartition en probabilité)

1.2 Limites aux bornes

Puissances entières (voir figures 1 et 2)

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{1}{x-a} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

Puissances réelles (voir figure 3)

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha < 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

$\alpha > 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$

Logarithme et exponentielle (voir figure 3)

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Croissance comparée

$\alpha > 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

2. METHODES DE CALCUL

La démarche doit toujours figurer clairement en indiquant soit que le résultat est connu d'après le cours, soit en faisant apparaître l'une des méthodes indiquées ci - dessous

2.1 Opérations

Somme

lim f	lim g	lim $f + g$
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**F I**

F I $\infty - \infty$

Racine

lim f	lim $\sqrt{f}$
$L \geq 0$	$\sqrt{L}$
$+\infty$	$+\infty$

Produit

lim f	lim g	lim f x g
L	L'	L x L'
$L \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	**F I**

} Appliquer la règle des signes

F I $0 \times \infty$

Quotient

lim f	lim g	lim f / g
L	$L' \neq 0$	L / L'
$L \neq 0$	0	∞
0	0	**F I**
L	∞	0
∞	L'	∞
∞	∞	**F I**

Appliquer la règle des signes

F I $\frac{0}{0}$

F I $\frac{\infty}{\infty}$

Fonction composée : Si $\lim\limits_{a} f = b$ et si $\lim\limits_{b} g = L$ alors $\lim\limits_{a} g \circ f = L$

La rigueur de la justification tient au fait que l'élève est capable de déceler si la limite est connue, si son calcul est la conséquence d'une opération citée ci - dessus ou s'il doit aller plus loin dans sa recherche en utilisant les autres méthodes indiquées par la suite.

2.2 Polynôme

☞ En $+\infty$ ou en $-\infty$, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

☞ Pour tout réel a, on a $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

2.3 Fonction rationnelle.

☞ En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction rationnelle se comporte comme le quotient des termes de plus haut degré

☞ Pour tout réel a de $D(Q)$, on a $\lim_{x\to a} Q(x) = Q(a)$.

☞ Si $\lim_{x\to a} Q(x)$ est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ alors on peut écrire :

$$Q(x) = \frac{(x-a)N(x)}{(x-a)D(x)} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to a} Q(x) = \lim_{x\to a} \frac{N(x)}{D(x)}.$$

2.4 Expression comportant des radicaux.

En présence de forme indéterminée avec des radicaux il faut transformer le terme comportant un radical qui pose problème.

☞ Entrer un nombre sous le radical (ATTENTION AU SIGNE).

☞ Produit par l'expression conjuguée.

2.5 Limites obtenues à l'aide des dérivées.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \exp'(0) = \exp(0) = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

3 THEOREMES DE COMPARAISON

f est une fonction définie sur un intervalle I. $a \in$ I (éventuellement $a = +\infty$ ou $a = +\infty$)

Th 1 : **1.** Si pour tout x de I, on a $f(x) > m$ alors $\lim_a f \geq m$.

2. Si pour tout x de I, on a $f(x) < M$ alors $\lim_a f \leq M$.

Th 2 : f et g sont définies sur I.

Si pour tout x de I, on a $f(x) > g(x)$ alors $\lim_a f \geq \lim_a g$.

conséquences du th 2 :

1. Si $\lim_{a} f = -\infty$ alors $\lim_{a} g = -\infty$
2. Si $\lim_{a} g = +\infty$ alors $\lim_{a} f = +\infty$.

Th 3 : (Th des gendarmes ou d'encadrement)

Si $\begin{cases} \text{Pour tout } x \text{ de I, on a } f(x) < g(x) < h(x) \\ \lim_{a} f = \lim_{a} h = L \end{cases}$ alors $\lim_{a} g = L$.

Th 4 :

Si $\begin{cases} \text{Pour tout } x \text{ de I, on a } |f(x) - L| \leq g(x) \\ \lim_{a} g = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{a} f = L$

4 Comportement asymptotique

☞ . . . $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale

☞ . . . $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ La droite d'équation $y = b$ est asymptote (horizontale) en $+\infty$.

☞ . . . $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ La droite d'équation $y = b$ est asymptote (horizontale) en $-\infty$.

☞ . . . $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ La droite d'équation $y = a.x + b$ est asymptote en $+\infty$.

☞ . . . $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ La droite d'équation $y = a.x + b$ est asymptote en $-\infty$.